

Kapitel 12

Verfahren zur Berechnung der Greenschen Funktion

Wir geben nun einige Verfahren an, mittels derer man die Greensche Funktion eines selbstadjungierten, skalaren, linearen Differentialoperators berechnen kann. Die Voraussetzung der Selbstadjungiertheit

$$L = L^*$$

ist sehr wesentlich, weil nur dann die von uns immer benützte Symmetrie zwischen Quell- und Aufpunkt, Gl. (11.4), erfüllt ist.

Es gibt zwei grundlegend verschiedene Verfahren, um Darstellungen einer Greenschen Funktion aufzustellen:

- 1) Die Methode der partikulären Integrale; diese wird in §12.1 vorgestellt.
- 2) Die Methode der Eigenfunktionsentwicklung ; diese wird in §12.2 vorgestellt.

Das zweite Verfahren kann auch zu einer schrittweisen Berechnung einer Greenschen Funktion eingesetzt werden; diese Erweiterung wird in §12.3 entwickelt.

Eine Greensche Funktion kann an neue Randbedingungen angepasst werden; dies ist der Gegenstand von §12.4. Die in §12.1 und §12.2 entwickelten Methoden liefern verschiedene Ausdrücke der gleichen Greenschen Funktion; diese können mittels funktionentheoretischer Methoden ineinander umgerechnet werden; dies wird an einem Beispiel im §12.5 vorgeführt.

12.1 Die Methode der partikulären Integrale

Diese Methode kann nur auf Differentialoperatoren mit nur einer unabhängigen Variablen angewendet werden. Das heißt nicht, dass dieser nur zu einem eindimensionalen Fall gehören kann. Z.B. ist in jedem Raum das Potential einer Punktquelle, damit auch die Greensche Funktion, nur von der radialen Variablen abhängig.

12.1.1 Die Greensche Funktion eines Differentialoperators 2. Ordnung

Im Intervall $[x_1, x_2]$ ist die folgende Differentialgleichung vorgeschrieben:

$$L G(x, x') = -\delta(x - x'), \quad x, x' \in [x_1, x_2]. \quad (12.1)$$

An den Intervallenden sind lineare, homogene Randbedingungen vorgeschrieben:

$$x = x_1 : \ell_1 G(x_1, x') = 0; \quad (12.2)$$

$$x = x_2 : \ell_2 G(x_2, x') = 0. \quad (12.3)$$

Zunächst betrachten wir Gl. (12.1) für eine Stelle $x \neq x'$ und schreiben dann:

$$L G(x, x') = 0. \quad (12.4)$$

In naiver (mathematisch etwas angreifbarer) Argumentation könnten wir uns hierzu auf Gl. (10.7) berufen. Eine strengere Vorgangsweise könnte man so entwickeln: Setzt man in Gl. (12.1) an Stelle der δ -Distribution ein Glied der Funktionenfolge $\delta_n(x)$ mit genügend hohem n ein, dann unterscheidet sich die rechte Seite der Gl. (12.1) von Null um ein Glied, das beliebig klein gemacht werden kann. Ebenso unterscheidet sich dann die Lösung dieser Gleichung mit Störglied von der homogenen Gleichung um einen Term, der beliebig klein werden kann. Wir suchen nun zwei partikuläre Lösungen der homogenen Gleichung (12.4) von denen die eine, $\phi_1(x)$, die Randbedingungen an $x = x_1$, die andere, $\phi_2(x)$, die Randbedingung an $x = x_2$ befriedigen soll.

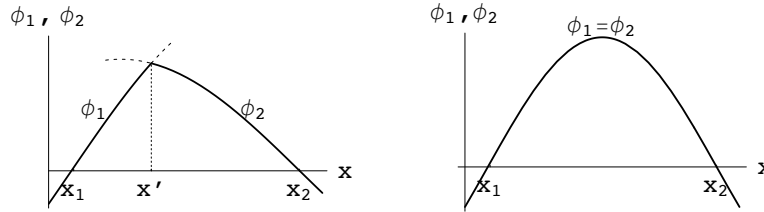


Abbildung 12.1: Die beiden partikulären Integrale erfüllen die Randbedingung an jeweils einem Endpunkt. Sie können linear unabhängig (links) oder linear abhängig (rechts) sein.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten: Entweder diese beiden partikulären Integrale der homogenen Differentialgleichung sind linear abhängig oder unabhängig.

Fall 1: $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$ sind **linear abhängig**. (Abb.12.1, rechts). Dann stellen $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$ die gleiche Funktion dar. Diese erfüllt die homogene Differentialgleichung und beide Randbedingungen. Es liegt dann ein Eigenwert vor und $\phi_1(x) \propto \phi_2(x)$ ist eine zugehörige Eigenfunktion. Dann existiert keine Greensche Funktion im gewöhnlichen Sinn.

Fall 2: ϕ_1 und ϕ_2 sind **linear unabhängig** (Abb.12.1, links). Dann machen wir für die Greensche Funktion folgenden Ansatz:

$$G(x, x') = A \begin{cases} \phi_1(x) \phi_2(x'), & x_1 \leq x < x' \leq x_2 ; \\ \phi_2(x) \phi_1(x'), & x_1 \leq x' < x \leq x_2 . \end{cases} \quad (12.5)$$

Dieser Ansatz ist symmetrisch in Quell- und Aufpunkt; er befriedigt die Randbedingungen an den beiden Intervallenden, Gln. (12.3), und die homogene Differentialgleichung (12.4), also (12.1) für $x \neq x'$. Die Konstante A , die die bisher benützte homogene Gleichung nicht festlegen konnte, wird bestimmt, indem man den Ansatz (12.5) in Gl. (12.1) einsetzt und über die resultierende Gleichung integriert:

$$\int_{x=x'-\varepsilon}^{x=x'+\varepsilon} dx L G(x, x') = - \int_{x=x'-\varepsilon}^{x=x'+\varepsilon} dx \delta(x - x') = - 1. \quad (12.6)$$

Zur Ausführung dieses Nominierungsintegrals spezialisieren wir den Differentialoperator L auf einen selbstadjungierten zweiter Ordnung (mit stetigem q und differenzierbarem p)

$$L \phi := (p \phi')' + q \phi,$$

$$- 1 = \int_{x=x'-\varepsilon}^{x=x'+\varepsilon} dx L G(x, x') = \int_{x=x'-\varepsilon}^{x=x'+\varepsilon} dx \frac{d}{dx} \left(p \frac{dG}{dx} \right) + \int_{x=x'-\varepsilon}^{x=x'+\varepsilon} q G dx.$$

Da die Greensche Funktion gemäß Ansatz (12.5) und q gemäß Voraussetzung stetig sind, geht das zweite Integral auf der rechten Seite der obigen Gleichung gegen Null, wenn ε gegen Null strebt.

Das erste Integral kann ausgeführt werden. Bei der noch verbleibenden Differentiation muss man die Struktur der Greenschen Funktion, Definition (12.5), beachten; $p(x)$ ist ebenfalls stetig.

$$-1 = p(x) \left. \frac{dG(x, x')}{dx} \right|_{x=x'-\varepsilon}^{x=x'+\varepsilon} = A p(x') [\phi_2'(x'+\varepsilon) \phi_1(x') - \phi_1'(x'-\varepsilon) \phi_2(x)].$$

Mittels der Definition der Wronskischen Determinante der partikulären Integrale $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$:

$$W(x) := \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} \quad (12.7)$$

kann man die Konstante A ausdrücken:

$$A = -\frac{1}{p(x')W(x')}. \quad (12.8)$$

Formal scheint in diesem Ausdruck noch eine Abhängigkeit der Konstanten A von der Variablen x' auf. Doch kürzt sich diese in Wirklichkeit heraus. Falls das nicht eintritt, hat man sich verrechnet. Die Greensche Funktion hat also mit (12.5) und (12.8) folgende Gestalt:

$$G(x, x') = -\frac{1}{p(x')W(x')} \begin{cases} \phi_1(x) \phi_2(x'), & x_1 \leq x < x' \leq x_2 ; \\ \phi_2(x) \phi_1(x'), & x_1 \leq x' < x \leq x_2 . \end{cases} \quad (12.9)$$

Die Schreibweise dieses Ausdruckes kann noch etwas kürzer gestaltet werden:

$$G(x, x') = -\frac{1}{p(x')W(x')} \phi_1(x_{<}) \phi_2(x_{>}) \quad (12.10)$$

mit

$$x_{<} = \min(x, x') \quad \text{und} \quad x_{>} = \max(x, x').$$

Die Greensche Funktion der schwingenden Saite

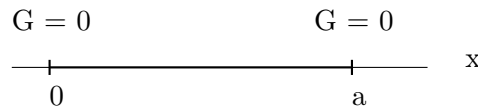


Abbildung 12.2: Greensche Funktion der schwingenden Saite,

Als Beispiel berechnen wir die Greensche Funktion für die Schwingungen einer an beiden Enden eingespannten Saite. (Abb.12.2). Die Differentialgleichung der Greenschen Funktion und deren Randbedingungen sind:

$$\frac{d^2G(x, x')}{dx^2} + k^2 G = -\delta(x - x'), \quad 0 \leq x \leq a; \quad (12.11)$$

$$x = 0, a: \quad G = 0. \quad (12.12)$$

Die Randbedingung "Funktion = 0" heißt Dirichletsche Randbedingung. Die zur obigen Gleichung gehörige homogene Gleichung

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + k^2 \phi = 0, \quad 0 \leq x \leq a;$$

hat folgende allgemeine Lösung:

$$\phi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

Daraus berechnet man die partikuläre Lösung, $\phi_1(x)$, die die linke Randbedingung erfüllt:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad \phi_1(0) &= A \sin(0) + B \cos(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow B = 0; \\ \phi_1(x) &:= \sin(kx). \end{aligned}$$

und, $\phi_2(x)$, das die rechte Randbedingung befriedigt:

$$\begin{aligned} x = a : \quad \phi_2(a) &= A \sin(ka) + B \cos(ka) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow B = -A \tan(ka); \\ \phi_2(x) &:= \sin(kx) - \tan(ka) \cos(kx). \end{aligned}$$

Die Wronskische Determinante (12.7) dieser beiden partikulären Integrale:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin(kx) & \sin(kx) - \tan(ka) \cos(kx) \\ k \cos(kx) & k \cos(kx) + \tan(ka) k \sin(kx) \end{vmatrix}$$

ist unabhängig von x ; ebenso $p(x) = 1$. Die Greensche Funktion ist dann gemäß(12.10):

$$G(x, x') = -\frac{1}{k \tan(ka)} \sin(kx_{<}) [\sin(kx_{>}) - \tan(ka) \cos(kx_{>})]; \quad (12.13)$$

$$k \neq k_n = n\pi/a, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12.14)$$

Eine noch einfachere Darstellung der Greenschen Funktion ergibt sich, wenn wir für $\phi_2(x)$ den folgenden Ausdruck wählen:

$$\phi_2(x) = \sin[k(a-x)]$$

Die Wronskische Determinante ist dann:

$$W = -k \sin(ka) = -1/A.$$

und die Greensche Funktion:

$$G(x, x') = \frac{\sin(kx_{<}) \sin[k(a-x_{>})]}{k \sin(ka)}. \quad (12.15)$$

Die Greensche Funktion und ihre Ableitung sind in Abb.12.3 gezeichnet.

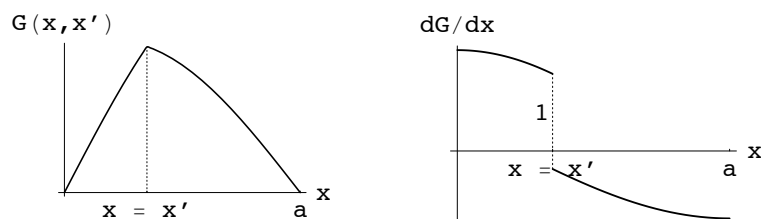


Abbildung 12.3: Die Greensche Funktion (links) ist stetig, ihre Ableitung weist einen endlichen Sprung auf (rechts).

Die Greensche Funktion der zeitunabhängigen Diffusionsgleichung im endlichen Intervall

Die zeitunabhängigen Diffusionsgleichung im Intervall $[0, a]$ mit Dirichletscher Randbedingung an den Enden ist:

$$\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} - \kappa^2 G = -\delta(x - x'), \quad 0 \leq x \leq a; \quad (12.16)$$

$$x = 0, a: \quad G = 0. \quad (12.17)$$

Sie geht aus der Wellengleichung (12.11) durch die Substitution $k \rightarrow i\kappa$ hervor. Durch die gleiche Substitution erhält man aus der Funktion (12.15) die Lösung zu (12.16):

$$G(x, x') = \frac{\sinh(\kappa x_{<}) \sinh[\kappa(a - x_{>})]}{\kappa \sinh(\kappa a)}; \quad 0 \leq x_{<}, x_{>} \leq a, \quad \kappa \in \mathbb{R}. \quad (12.18)$$

Diese Lösung existiert für alle Werte von κ ; daraus kann man schließen: Die zeitunabhängige Diffusionsgleichung, Gl.(12.16), hat keine Eigenwerte zu Dirichletschen Randbedingungen.

Die Greensche Funktion der zeitunabhängigen Diffusionsgleichung im unendlichen Intervall

$$\begin{array}{ccc} G = 0 & & G = 0 \\ |-----| & & |-----| \\ -\infty & & \infty \end{array} \quad x$$

Abbildung 12.4: Greensche Funktion der zeitunabhängigen Diffusionsgleichung im unendlichen Intervall.

$$\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} - \kappa^2 G = -\delta(x - x'), \quad -\infty \leq x \leq \infty; \quad (12.19)$$

$$x = \pm \infty: \quad G = 0. \quad (12.20)$$

Die partikulären Lösungen an den Enden des Intervalls sind:

$$x_1 = -\infty: \phi_1 = e^{\kappa x}; \quad x_2 = \infty: \phi_2 = e^{-\kappa x}.$$

Die Formeln (12.9) ergeben dann Ausdrücke, die sich folgendermaßen zusammenfassen lassen:

$$G(x, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|x - x'|}. \quad (12.21)$$

12.1.2 Die Greensche Funktion eines Differentialoperators der Ordnung $2n$

Bei selbstadjungierter Differentialoperator der Ordnung $2n$, $n > 1$, ist der Ansatz (12.5) zu eng. Doch die Symmetrie in Quell- und Aufpunkt bleibt gültig. Die Vorgangsweise zur Konstruktion der Greenschen Funktion wird im folgenden gezeigt.

Die Gleichung für die Greensche Funktion des eindimensionalen, selbstadjungierten Differentialoperators der Ordnung $2n$ ist:

$$L^{(2n)}G(x, x') = -\delta(x - x').$$

Je n lineare homogene Randbedingungen sind an jedem Rand vorgeschrieben:

$$x = x_1: \quad \ell_1(G) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (12.22)$$

$$x = x_2: \quad \ell_2(G) = 0, \quad i = n + 1, n + 2, \dots, 2n. \quad (12.23)$$

$$\ell_k = a_{n-1}^k \partial^{n-1} + a_{n-2}^k \partial^{n-2} + \dots + a_1^k \partial + a_0^k, \quad \partial = \partial/\partial x. \quad (12.24)$$

Zunächst nehmen wir wieder: $x \neq x'$ und lösen die zugehörige homogene Gleichung:

$$x \neq x' : \quad L^{(2n)}G(x, x') = 0, \quad L^{(2n)}\psi(x) = 0.$$

Diese lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung $2n$ hat ein Fundamentalsystem von $2n$ linear unabhängigen Lösungen:

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{2n}(x).$$

Wir machen folgenden Ansatz:

$$G_{<}(x, x') = \sum_{i=1}^{2n} c_i(x') \psi_i(x), \quad G_{>}(x, x') = \sum_{i=1}^{2n} d_i(x') \psi_i(x).$$

Es sind $4n$ unbekannte Funktionen $c_i(x')$ und $d_i(x')$ zu bestimmen. Hiefür gibt es $4n$ Bedingungen-gleichungen, und zwar:

1. Randbedingung von $G(x, x')$ an $x = x_1$: n Gleichungen,

$$x = x_1 : \quad \ell_j(G_{<}(x, x')) = \sum_{i=1}^{2n} c_i(x') \ell_j(\psi_i(x));$$

2. Randbedingung von $G(x, x')$ an $x = x_2$: n Gleichungen,

$$x = x_2 : \quad \ell_j(G_{<}(x, x')) = \sum_{i=1}^{2n} c_i(x') \ell_j(\psi_i(x));$$

3. Sprungverhalten von $G(x, x')$ an $x = x'$: $2n$ Gleichungen,

$$x = x' : \quad \int_{x=x'-\varepsilon}^{x=x'+\varepsilon} dx L^{((2n))} G(x, x') = - \int_{x=x'-\varepsilon}^{x=x'+\varepsilon} \delta(x - x') dx = -1.$$

alle niedrigeren Ableitungen sind stetig.

Für den Operator:

$$L^{(2n)} = d^{(2n)}/dx^{(2n)}$$

gibt das:

$$\int_{x=x'-\varepsilon}^{x=x'+\varepsilon} dx \frac{d^{2n}G}{dx^{2n}} = \left. \frac{d^{2n-1}G_{>}}{dx^{2n-1}} \right|_{x=x'+\varepsilon} - \left. \frac{d^{2n-1}G_{<}}{dx^{2n-1}} \right|_{x=x'-\varepsilon} = -1;$$

$$\left. \frac{d^{2n-k}G_{>}}{dx^{2n-k}} \right|_{x=x'+\varepsilon} - \left. \frac{d^{2n-k}G_{<}}{dx^{2n-k}} \right|_{x=x'-\varepsilon} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, 2n.$$

Biegeschwingungen eines Stabes

Derartige Schwingungen werden durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\mu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{E h^2}{12} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = 0. \quad (12.25)$$

mit

h = Höhe des Stabes

E = Elastizitätsmodul des Stabes

μ = lineare Massendichte des Stabes

Mit dem nachfolgenden Ansatz für zeitlich harmonische Schwingungen

$$u(x, t) = \phi(x) e^{i\omega t}$$

wird aus Gl.(12.25) folgende gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$\frac{d^4\phi(x)}{dx^4} + k^4 \phi = 0. \quad (12.26)$$

mit

$$k^4 = \omega^2 \frac{12\mu}{E h^2}.$$

An den Enden können folgende Randbedingungen vorgeschrieben werden:

1. Der Stab ist am Ende eingespannt:

$$u \sim \phi = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{d\phi}{dx} = 0. \quad (12.27)$$

2. Der Stab ist am Ende frei:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \sim \frac{d^3\phi}{dx^3} = 0. \quad (12.28)$$

Die Berechnung der Greenschen Funktion zu Gl.(12.26) ist sehr aufwändig. Daher beschränken wir uns auf die Berechnung der Greenschen Funktion für eine einfachere Differentialgleichung 4. Ordnung, nämlich:

$$L^{(4)}G(x, x') = \frac{d^4G(x, x')}{dx^4} = -\delta(x - x'). \quad (12.29)$$

Das Ende $x = 0$ ist festgeklemmt, das andere, $x = a$, ist frei. Daher sind folgende Randbedingungen vorgeschrieben:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad \ell_1(G) &= G(0, x') = 0, \\ \ell_2(G) &= \left. \frac{\partial G(x, x')}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \\ x = a : \quad \ell_3(G) &= \left. \frac{\partial^2 G(x, x')}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0, \\ \ell_4(G) &= \left. \frac{\partial^3 G(x, x')}{\partial x^3} \right|_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung ist ein kubisches Polynom:

$$\psi^{(4)} = 0 : \quad \psi = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Die Ansätze für die beiden Stücke der Greenschen Funktion:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad G_{<}(x, x') &= c_0(x') + c_1(x')x + c_2(x')x^2 + c_3(x')x^3, \\ x = a : \quad G_{>}(x, x') &= d_0(x') + d_1(x')x + d_2(x')x^2 + d_3(x')x^3. \end{aligned}$$

werden in die obigen Randbedingungen eingesetzt:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad G_{<}(0, x') &= c_0(x') = 0 \Rightarrow c_0 = 0; \\ \left. \frac{\partial G_{<}(x, x')}{\partial x} \right|_{x=0} &= c_1(x') = 0 \Rightarrow c_1 = 0; \\ x = a : \quad \left. \frac{\partial^2 G_{>}(x, x')}{\partial x^2} \right|_{x=a} &= 2d_2 + 6d_3a = 0 \Rightarrow d_2 = 0; \\ \left. \frac{\partial^3 G_{>}(x, x')}{\partial x^3} \right|_{x=0} &= 6d_3 = 0 \Rightarrow d_3 = 0. \end{aligned}$$

Die verbleibenden Ausdrücke für die beiden Stücke:

$$\begin{aligned} G_{<}(x, x') &= c_2(x')x^2 + c_3(x')x^3, \\ G_{>}(x, x') &= d_0(x') + d_1(x')x. \end{aligned}$$

werden in die Bedingungen am Punkte $x = x'$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^3 G_{>}(x, x')}{\partial x^3} \right|_{x=x'} - \left. \frac{\partial^3 G_{<}(x, x')}{\partial x^3} \right|_{x=x'} &= 0 - 6c_3 = -1; \\ \left. \frac{\partial^2 G_{>}(x, x')}{\partial x^2} \right|_{x=x'} - \left. \frac{\partial^2 G_{<}(x, x')}{\partial x^2} \right|_{x=x'} &= 0 - 2c_2(x')x' - 6c_3(x')x'^2 = 0; \\ \left. \frac{\partial G_{>}(x, x')}{\partial x} \right|_{x=x'} - \left. \frac{\partial G_{<}(x, x')}{\partial x} \right|_{x=x'} &= d_1(x') - 2c_2(x')x' - 3c_3(x')x'^2 = 0; \\ G_{>}(x, x') \Big|_{x=x'} - G_{<}(x, x') \Big|_{x=x'} &= d_0(x') + d_1(x')x' - c_2(x')x'^2 - c_3(x')x'^3 = 0 \end{aligned}$$

und liefern die noch offenen Koeffizientenfunktionen:

$$c_3 = -1/6, \quad c_2 = -x'/2, \quad d_1 = -x'^2, \quad d_0 = x'^3/6.$$

Die beiden Stücke der Greensche Funktion sind also:

$$\begin{aligned} G_{<}(x, x') &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2x', \\ G_{>}(x, x') &= \frac{1}{6}x'^3 - \frac{1}{2}x'^2x. \end{aligned}$$

Die Greensche Funktion der Gl.(12.29) lautet also:

$$G(x, x') = \frac{1}{6}x_{<}^3 - \frac{1}{6}x_{<}^2x_{>} = \frac{1}{6}x_{<}^2(x_{<} - 3x_{>}). \quad (12.30)$$

12.2 Entwicklung der Greenschen Funktion nach Eigenfunktionen unter Verwendung von Vollständigkeitsrelationen

Dieses Verfahren ist anwendbar unter der Voraussetzung, dass der Differentialoperator vom Sturm-Liouvilleschen Typ ist:

$$LG = L_r + \lambda G = -\delta(x - x'). \quad (12.31)$$

Z.B. ist der Operator in Gl.(12.11) von diesem Typ, wenn man $\lambda = k^2$ setzt. λ ist ein reeller Eigenwertparameter, dessen zulässige Werte durch die Randbedingungen festgelegt werden. Der Operator L muss in λ linear sein.

12.2.1 Eindimensionaler Fall

Die Methode ist auch für mehrere unabhängige Variable verwendbar, zunächst wird sie aber für eine unabhängige Variable x durchgeführt. Der Operator, damit die obige Differentialgleichung, sind in einem Intervall $[x_1 \leq x \leq x_2]$ definiert. An den Enden des Definitionsbereiches genügt die Greensche Funktion folgenden homogenen Randbedingungen:

$$x = x_i : \quad a_i G + b_i \frac{\partial G}{\partial n} = 0. \quad (12.32)$$

mit gegebenen Konstanten a_1, b_1, a_2, b_2 .

Wir benötigen Eigenwerte λ_m und -funktionen $\phi_m(x)$, die der zu Gl.(12.31) analogen homogenen Differentialgleichung und den Randbedingungen (12.32) genügen:

$$L \phi_m(x) = L_r \phi_m + \lambda_m \phi_m = 0; \quad (12.33)$$

$$x = x_1 : \quad a_1 \phi_m(x_1) + b_1 \frac{\partial \phi_m(x_1)}{\partial x} = 0, \quad (12.34)$$

$$x = x_2 : \quad a_2 \phi_m(x_2) + b_2 \frac{\partial \phi_m(x_2)}{\partial x} = 0. \quad (12.35)$$

Es wird angenommen, dass die Menge der Funktionen $\{\phi_n(x)\}_{n=n_0}^{\infty}$ ein vollständiges orthonormiertes System bilden; d.h. es gilt die Vollständigkeitsrelation (vgl. §7.3):

$$\delta(x - x') = \sum_{n=n_0}^{\infty} \phi_n^*(x) \phi_n(x); \quad (12.36)$$

dabei ist das System $\{\phi_n^*(x)\}_{n=n_0}^{\infty}$ das zu $\{\phi_n(x)\}_{n=n_0}^{\infty}$ adjungierte System; dieses ist durch die folgenden Orthonormierungsrelationen definiert:

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi_n^*(x) \phi_k(x) dx = \delta_{n,k}. \quad (12.37)$$

Dementsprechend wird für die Greensche Funktion folgender Ansatz gemacht:

$$G(x, x') = \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n \phi_n^*(x) \phi_n(x). \quad (12.38)$$

Beide Reihen werden in Gl. (12.31) eingesetzt, $L_r \phi_n$ wird mittels Gl. (12.33) eliminiert. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\phi_n(x)$ muss jede rechteckige Klammer für sich Null sein:

$$0 = L_r G + \lambda G + \delta(x - x') = \sum_{n=n_0}^{\infty} \phi_n^*(x) \left[c_n \left(\underbrace{L_r \phi_n(x)}_{-\lambda_n \phi_n} + \lambda \phi_n(x) \right) + \phi_n(x) \right].$$

Dies gibt eine Gleichung für den Koeffizienten c_n :

$$c_n (\lambda - \lambda_n) = -1.$$

Damit hat man folgende Darstellung für die Greensche Funktion:

$$G(x, x') = - \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\phi_n^*(x) \phi_n(x)}{\lambda - \lambda_n}. \quad (12.39)$$

Eine Reihendarstellung der Greenschen Funktion der schwingenden Saite

Als Beispiel betrachten wir wieder die Greensche Funktion der schwingenden Saite, Gln. (12.11). Die Eigenwerte und normierten Eigenfunktionen dieses Problems sind (cf.Gl.(1.24)):

$$\lambda = k^2, \quad \lambda_n = k_n^2 = (n\pi/a)^2, \quad \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(k_n x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.40)$$

Dies in Gl. (12.39) eingesetzt gibt sofort die Darstellung der Greenschen Funktion der Gln. (12.11):

$$G(x, x') = - \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(k_m x) \sin(k_m x')}{k^2 - k_m^2}. \quad (12.41)$$

Da $k_m \sim m$, gilt für genügend großes m für ein Glied der obigen Reihe folgende Abschätzung:

$$\left| \frac{\sin() \sin()}{k^2 - k_m^2} \right| < \frac{c}{k_m^2} \sim \frac{1}{m^2}.$$

Die Reihe für die eindimensionale Greensche Funktion ist also absolut und gleichmäßig konvergent. Dies gilt im allg. nicht mehr im mehrdimensionalen Fall. Fällt k mit einem der Eigenwerte zusammen, dann wird der Nenner im entsprechenden Term obiger Reihenentwicklung Null, die Greensche Funktion existiert nicht mehr.

Vom numerischen Standpunkt aus gesehen ist eine Konvergenz wie $1/m^2$ als ziemlich langsam zu betrachten. Die Ableitung der Reihe in (12.41) konvergiert wie $1/m$, also bedingt; dies ist eine Folge des Sprunges der Funktion $dG(x, x')/dx$ an der Stelle $x = x'$; vgl. Abb.12.3, rechts.

Reihenentwicklung der Greensche Funktion der zeitunabhängigen Diffusionsgleichung im endlichen Intervall

Nach Gl.(12.18) wurde erklärt, dass die zeitunabhängigen Diffusionsgleichung, Gl.(12.16), keine Eigenwerte, damit auch keine Eigenfunktionen hat. Deswegen muss man die Eigenfunktionen der schwingenden Saite heranziehen, um eine Reihenentwicklung der Greenschen Funktion dieser Diffusionsgleichung aufstellen zu können. Analog zur Vollständigkeitsrelation machen wir dann folgenden Ansatz:

$$G(x, x') = -\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin(k_m x) \sin(k_m x'), \quad k_m = m\pi/a.$$

Die Vollständigkeitsrelation ist obige Reihe mit $c_m = 1$. Setzt man diese und den obigen Ansatz in die Gl.(12.16) ein, ergibt sich $c_m = 1/(\kappa^2 + (m\pi/a)^2)$, danach durch Einsetzen in obige Darstellung die gesuchte Reihendarstellung.

$$G(x, x') = -\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2 + (m\pi/a)^2} \sin(k_m x) \sin(k_m x'). \quad (12.42)$$

Die Nenner aller Reihenglieder sind für alle (reellen) Werte von κ ungleich Null; wie es sein muss, weil die Differentialgleichung keine Eigenwerte hat.

12.2.2 Mehrdimensionaler Fall

Die Berechnung der Greenschen Funktion eines Sturm-Liouvilleschen Problems in krummlinigen Koordinaten u_1, \dots, u_n verläuft analog: Das zu

$$L_r G(u_1, \dots, u_n; u'_1, \dots, u'_n) = L_r G + \lambda G = -\delta^n(u - u')/g_1 g_2 \dots g_n \quad (12.43)$$

gehörige homogene Problem habe die Eigenwerte $\lambda_{n_1, n_2, \dots, n_n}$ und die Eigenfunktionen $\phi_{n_1, n_2, \dots, n_n}$:

$$L_r \phi_{n_1, n_2, \dots, n_n} + \lambda_{n_1, n_2, \dots, n_n} \phi_{n_1, n_2, \dots, n_n} = 0. \quad (12.44)$$

Die Eigenfunktionen genügen den Randbedingungen für G und bilden ein vollständiges, orthonormiertes System (cf. Eqs.(7.28), (7.29)). Dann lautet die Darstellung der Greenschen Funktion:

$$G(u_1, \dots, u_n; u'_1, \dots, u'_n) = - \sum_{n_1, n_2, \dots, n_n} \frac{\phi_{n_1, n_2, \dots, n_n}^*(u'_1, \dots, u'_n) \phi_{n_1, n_2, \dots, n_n}(u_1, \dots, u_n)}{\lambda - \lambda_{n_1, n_2, \dots, n_n}}. \quad (12.45)$$

Die Summe kann in manchen Indices auch ein Integral sein, wenn das Spektrum kontinuierlich ist. Für $n \geq 2$ ist die obige Reihe im allgemeinen nur mehr bedingt konvergent.

Schwingungen einer dünnen, am Rande eingespannten rechteckigen Platte

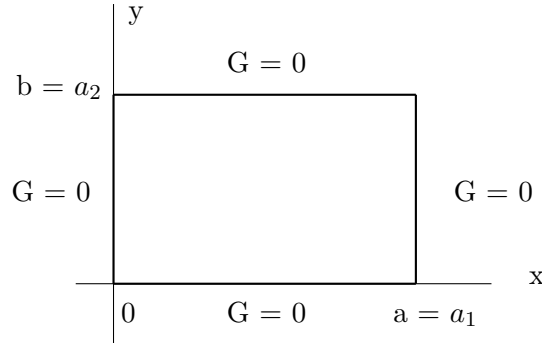


Abbildung 12.5: Greensche Funktion der schwingenden rechteckigen Platte.

Als Beispiel betrachten wir die zweidimensionale Helmholtz-Gleichung in einem Rechtecksbereich, s. Abb. 12.5. Genaugenommen werden die Schwingungen einer Platte durch einen Differentialoperator vierter Ordnung beschrieben; insofern ist der obige Titel nicht ganz zutreffend. Die Greensche Funktion soll am Rande Null sein:

$$\Delta G + k^2 G = -\delta^2(x - x'). \quad (12.46)$$

$$x = 0 \vee x = a_1, \quad 0 \leq y \leq a_2 : G = 0; \quad (12.47)$$

$$y = 0 \vee y = a_2, \quad 0 \leq x \leq a_1 : G = 0. \quad (12.48)$$

Die zugehörige homogene Gleichung wird durch Separation gelöst:

$$k_{n_1, n_2}^2 = k_{n_1}^2 + k_{n_2}^2; \quad (12.49)$$

$$\phi_{n_1, n_2} = \phi_{n_1}(x_1) \phi_{n_2}(x_2). \quad (12.50)$$

Damit reduziert sich die Lösung auf die zweimalige Anwendung der normierten Lösungen von (1.24):

$$x = x_1, \quad y = x_2 : \quad \frac{d^2 \phi_{n_i}(x_i)}{dx_i^2} + k_{n_i}^2 \phi_{n_i} = 0,$$

$$k_{n_i} = n_i \pi / a_i : \quad \phi_{n_i}(x_i) = \sqrt{\frac{2}{a_i}} \sin(k_{n_i} x_i) \quad (12.51)$$

$$\phi_{n_i}(0) = \phi_{n_i}(a_i) = 0.$$

Die Eigenfunktionen (12.51) gehorchen auch den Randbedingungen (12.47), (12.48) der Greenschen Funktion. Gemäß Gl. (12.45) lautet die zu Gl. (12.46) gehörige Greensche Funktion:

$$G(x, y : x' y') = -\frac{4}{a_1 a_2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\sin(n_1 \pi x'_1 / a_1) \sin(n_1 \pi x_1 / a_1) \sin(n_2 \pi x'_2 / a_2) \sin(n_2 \pi x_2 / a_2)}{k^2 - k_{n_1, n_2}^2} \quad (12.52)$$

$$k_{n_1, n_2}^2 = \left(\frac{n_1 \pi}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2 \pi}{a_2}\right)^2. \quad (12.53)$$

Weitere Darstellungen dieser Greenschen Funktion werden im nächsten Paragraphen abgeleitet werden.

12.3 Methode der schrittweisen Reduktion

Der Differentialoperator L enthält n unabhängige Variable x_1, \dots, x_n . Die zugehörige Greensche Funktion ist definiert durch:

$$LG(x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_n) = -\delta^n(x - x') \quad (12.54)$$

mit entsprechenden Randbedingungen. Es wird vorausgesetzt, dass der Differentialoperator L und die Randbedingungen in x_n separabel sind. Das heißt: der Differentialoperator kann in die Summe zweier Differentialoperatoren zerlegt werden :

$$L = L_1(x_1, \dots, x_{n-1}, \partial_1, \dots, \partial_{n-1}) + L_2(x_n, \partial_n); \quad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (12.55)$$

derart, dass

1. L_2 nur x_n und zugehörige Ableitungen, nicht aber x_1, \dots, x_{n-1} und nicht die dazu gehörigen Ableitungen enthält, während
2. in L_1 nur x_1, \dots, x_{n-1} und zugehörige Ableitungen, nicht aber x_n und nicht die dazu gehörigen Ableitungen vorkommen ;
3. und dass die Randbedingungen in x_n unabhängig sind von den anderen Variablen x_1, \dots, x_{n-1} .
4. Von L_2 sind die Eigenwerte λ_{n_n} und Eigenfunktionen $\phi_{n_n}(x_n)$ bekannt:

$$L_2 \phi_{n_n}(x_n) + \lambda_{n_n} \phi_{n_n}(x_n) = 0. \quad (12.56)$$

5. Diese bilden ein vollständiges orthonormiertes System und erfüllen die Randbedingungen, die für G in x_n vorgeschrieben sind.

Dann erfüllen die eben eingeführten Eigenfunktionen folgende Vollständigkeitsrelation:

$$\delta(x_n - x'_n) = \sum_{n_n=n_0}^{\infty} \phi_{n_n}^*(x'_n) \phi_{n_n}(x_n). \quad (12.57)$$

In Analogie dazu wählen wir für die Greensche Funktion G den folgenden Ansatz:

$$G(x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_n) := \sum_{n_n=n_0}^{\infty} g_{n_n}(x_1, \dots, x_{n-1}; x'_1, \dots, x'_{n-1}) \phi_{n_n}^*(x'_n) \phi_{n_n}(x_n). \quad (12.58)$$

Damit gehen wir in (12.54) und (12.55) ein:

$$\begin{aligned} LG &= L_1G + L_2G = \\ &= \sum_{n_n=n_0}^{\infty} L_1 g_{n_n}(x_1, \dots, x_{n-1}; x'_1, \dots, x'_{n-1}) \phi_{n_n}^*(x'_n) \phi_{n_n}(x_n) \\ &\quad + \sum_{n_n=n_0}^{\infty} g_{n_n}(x_1, \dots, x_{n-1}; x'_1, \dots, x'_{n-1}) \phi_{n_n}^*(x'_n) \underbrace{L_2 \phi_{n_n}(x_n)}_{-\lambda_{n_n} \phi_{n_n}(x_n)} \\ &= -\delta(x_1 - x'_1) \dots \delta(x_{n-1} - x'_{n-1}) \sum_{n_n=n_0}^{\infty} \phi_{n_n}(x_n) \phi_{n_n}^*(x'_n). \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird umgeschrieben:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \phi_{n_n}^*(x'_n) \phi_{n_n}(x_n) \left[(L_1 - \lambda_{n_n}) g_{n_n}(x_1, \dots, x_{n-1}; x'_1, \dots, x'_{n-1}) + \delta(x_1 - x'_1) \dots \delta(x_{n-1} - x'_{n-1}) \right] = 0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\phi_{n_n}(x_n)$ erhalten wir ein Problem, dessen Dimension um 1 erniedrigt worden ist.:

$$(L_1 - \lambda_{n_n}) g_{n_n}(x_1, \dots, x_{n-1}; x'_1, \dots, x'_{n-1}) = -\delta^{n-1}(x - x'). \quad (12.59)$$

Falls dieses Problem in weiteren Variablen separabel ist, kann man auch auf diese das obige Verfahren anwenden. Wenn dies in allen Variablen möglich ist, kann man schrittweise die Zahl der Variablen verringern und die letzte Gleichung nach einer der Methoden von §12.1 oder §12.2 lösen. Diese Methode kann auch krummlinigen orthogonalen Koordinaten u_1, \dots, u_n benützt werden, wenn die Separierbarkeit gegeben ist.

Schwingungen einer dünnen, am Rande eingespannten rechteckigen Platte (Fts.)

Die Methodeder schrittweisen Reduktion wird wieder am Beispiel der zweidimensionalen Helmholtzgleichung in einem Rechtecksbereich mit der Randbedingung Null, Gln.(12.46) bis (12.48) vorgeführt. In der Variablen y werden wieder die Lösungen (12.40) herangezogen und die Vollständigkeitsrelation aufgestellt:

$$\delta(y - y') = \frac{2}{a} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sin(n_2 \pi y'/a_2) \sin(n_2 \pi y/a_2).$$

Mit dem Ansatz

$$G(x, y; x', y') = \frac{2}{a} \sum_{n_2=1}^{\infty} g_{n_2}(x, x') \sin(n_2 \pi y'/a_2) \sin(n_2 \pi y/a_2).$$

gehen wir in Gl. (12.46) ein und bekommen:

$$\frac{d^2}{dx^2} g_{n_2}(x, x') + (k^2 - k_{n_2}^2) g_{n_2}(x, x') = -\delta(x - x').$$

Mit der Abkürzung

$$\gamma_{n_2} = \sqrt{k^2 - k_{n_2}^2}$$

und unter Berücksichtigung der Randbedingung $x = 0, a_1 : g_{n_2}(x, x') = 0$ bekommen wir gemäß Gl.(12.15) für die Greensche Funktion der obigen eindimensionalen Gleichung:

$$g_{n_2}(x, x') = \frac{\sin(\gamma_{n_2} x_{<}) \sin[\gamma_{n_2}(a_1 - x_{>})]}{\gamma_{n_2} \sin(\gamma_{n_2} a_1)}. \quad (12.60)$$

Die gesamte Greensche Funktion lautet also:

$$G(x, y; x', y') = \frac{2}{a_1} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\sin(\gamma_{n_2} x_{<}) \sin[\gamma_{n_2}(a_1 - x_{>})]}{\gamma_{n_2} \sin(\gamma_{n_2} a_1)} \sin\left(n_2 \frac{n_2 \pi y'}{a_2}\right) \sin\left(n_2 \frac{n_2 \pi y}{a_2}\right). \quad (12.61)$$

Ab einem gewissen N_2 sind die γ_{n_2} rein imaginär, also:

$$\begin{aligned} n_2 \leq N_2 : \quad k_{n_2}^2 < k^2, \quad \gamma_{n_2}^2 > 0, \quad \gamma_{n_2} &= \sqrt{k^2 - k_{n_2}^2}; \\ n_2 > N_2 : \quad k_{n_2}^2 > k^2, \quad \gamma_{n_2}^2 < 0, \quad \gamma_{n_2} &= i \mu_{n_2}, \quad \mu_{n_2} = \sqrt{k_{n_2}^2 - k^2}. \\ \sin(\gamma_{n_2} x) &= \sin(i \mu_{n_2} x) = i \sinh(\mu_{n_2} x). \end{aligned}$$

Damit bekommen wir die endgültige Gestalt dieser Darstellung der Greenschen Funktion:

$$\begin{aligned} G(x, y; x', y') &= \tag{12.62} \\ &= \frac{2}{a_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \frac{\sin(\gamma_{n_2} x_{<}) \sin[\gamma_{n_2}(a_1 - x_{>})]}{\gamma_{n_2} \sin(\gamma_{n_2} a_1)} \sin\left(\frac{n_2 \pi y'}{a_2}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{a_2}\right) \\ &+ \frac{2}{a_1} \sum_{n_2=N_2+1}^{\infty} \frac{\sinh(\mu_{n_2} x_{<}) \sinh[\mu_{n_2}(a_1 - x_{>})]}{\mu_{n_2} \sinh(\mu_{n_2} a_1)} \sin\left(\frac{n_2 \pi y'}{a_2}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{a_2}\right). \end{aligned}$$

Man kann auch eine analoge Darstellung ableiten, in der $x = x_1$ mit $y = x_2$ und n_1 mit n_2 vertauscht sind. Die Summe läuft dann über n_1 .

$$G(x, y; x', y') = \tag{12.63}$$

12.4 Anpassung einer Greenschen Funktion an neue Randbedingungen

Wie im Kap.15 besprochen werden wird, weist jede Greensche Funktion in der Grenze Aufpunkt \rightarrow Quellpunkt eine charakteristische Singularität auf, deren Charakter nur von den Termen höchster Ordnung des Differentialoperators und von der Zahl der unabhängigen Variablen (= Dimension des Raumes) abhängt, während die Randbedingungen keinen Einfluss darauf haben. Wenn daher für einen Differentialoperator bereits für irgendeine Randbedingung eine Greensche Funktion bekannt ist, ist es oft möglich, mit deren Hilfe die neue Greensche Funktion des gleichen Operators für andere Randbedingungen aufzusuchen. Dies ist manchmal vorteilhafter als die Neuberechnung der Greenschen Funktion nach den Methoden dieses Kapitels, weil gerade die mit der Singularität der Greenschen Funktion verknüpften Berechnungen oft langwierig sind. Für den Differentialoperator L ist eine Greensche Funktion G_1

$$LG_1(x, x') = -\delta^n(x - x') \tag{12.64}$$

bekannt, die irgendwelche (hier nicht interessierende) Randbedingungen erfüllt. n ist die Dimension des Raumes. Wir suchen eine neue Greensche Funktion G_2 , die ebenfalls Lösung von (12.64) ist und zu der (den) homogenen Randbedingung(en)

$$a G_2 + b \frac{dG_2}{dn} = 0 \quad \text{längs } \mathcal{F} \quad (12.65)$$

gehört. Diese noch unbekannte Greensche Funktion G_2 wird unter Zuhilfenahme von G_1 berechnet. Dazu benötigen wir die allgemeine Lösung der zu (12.64) gehörigen homogenen Gleichung.

$$L\Phi(x) = 0. \quad (12.66)$$

Diese hängt natürlich von Integrationskonstanten ab. Ist L ein gewöhnlicher oder partieller Differentialoperator, dessen partikuläre Lösungen durch Separation der Variablen berechnet werden können, dann erhält man ein System von partikulären Integralen. Deren Zahl ist endlich, wenn in L nur eine einzige unabhängige Variable vorkommt; dann ist die entsprechende Differentialgleichung eine gewöhnliche. Diesfalls ist Zahl der partikulären Integrale endlich und gleich der Ordnung der Differentialgleichung. Ist L ein partieller Differentialoperator, dann gibt es ein unendliches System partikulärer Integrale, dessen Vollständigkeit sichergestellt werden muss. Die benötigte allgemeine Lösung bildet man dann als Linearkombination aller dieser partikulären Integrale mit unbestimmten Koeffizienten c_i .

$$\Phi(x) = \sum_i \bar{\Phi}(x, c_i). \quad (12.67)$$

Für die gesuchte Greensche Funktion G_2 macht man den Ansatz:

$$G_2(x, x') := G_1(x, x') + \Phi(x) = G_1(x, x') + \sum_i \bar{\Phi}(x, c_i)$$

und setzt diesen in die Randbedingungen (12.64) ein.

$$a G_2 + b \frac{dG_2}{dn} = a \left(G_1 + \sum_i \bar{\Phi}(x, c_i) \right) + b \left(\frac{dG_1}{dn} + \sum_i \frac{d\bar{\Phi}(x, c_i)}{dn} \right) = 0 \quad x \in \mathcal{F}. \quad (12.68)$$

Dies gibt ein System von Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten c_i . Über G_1 werden die c_i Funktionen von x' , sodass die Symmetrie der Greenschen Funktion in x und x' gewahrt bleibt. Ist z.B. L ein Differentialoperator zweiter Ordnung für eine Variable, dann hat man zwei Randbedingungen, die zur Bestimmung der beiden in $\Phi(x)$ auftretenden Integrationskonstanten gerade ausreichen. Ist L ein partieller Differentialoperator, dann ist die Randbedingung (12.64) längs einer Kurve oder Fläche gegeben. Aus dieser resultiert ein unendliches Gleichungssystem. Dieses ist praktisch nur dann lösbar, wenn sich die Randkurve oder -fläche \mathcal{F} in das Koordinatensystem, in dem L separabel ist, so einbetten lässt, dass längs \mathcal{F} eine Variable konstant ist. Dann muss man auch G_1 nach den partikulären Integralen von L entwickeln. Wegen der linearen Unabhängigkeit der partikulären Integrale von (12.66) kann man dann (12.68) in ein System von unendlich vielen Gleichungen für die c_i zerlegen. Falls jede dieser Gleichungen gerade nur ein c_i involviert, ist die Lösung einfach. Falls in jeder Gleichung mehrere c_i vorkommen, ist es fast unmöglich, eine Lösung dieses unendlichen Systems verkoppelter Gleichungen zu finden.

Die Greensche Funktion der eindimensionalen, zeitunabhängigen Diffusionsgleichung für ein endliches Intervall

Die gesuchte Greensche Funktion G_2 , Lösung der og. Gleichung und Radbedingungen (12.16) im Intervall $[0, a]$, wurde bereits in Gl.(12.18) angegeben. In diesem Beispiel wird diese neuerlich berechnet, indem wir von der Greenschen Funktion (12.21)

$$G_1(x, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|x - x'|}. \quad (12.69)$$

für das unendliche Intervall $[-\infty, \infty]$ ausgehen. Die partikulären Lösungen der eindimensionalen homogenen Diffusionsgleichung $d^2\Phi/dx^2 - \kappa^2\Phi = 0$ sind die beiden reellen Exponentialfunktionen $\Phi_1 = e^{\kappa x}$, $\Phi_2 = e^{-\kappa x}$. Wir setzen also an:

$$G_2(x, x') = G_1(x, x') + c_1 \Phi_1(x) + c_2 \Phi_2(x) = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|x-x'|} + c_1 e^{\kappa x} + c_2 e^{-\kappa x}.$$

Für die Randbedingung am linken Rand setzt man $x' > x = 0$ in $G_2(0, x') = 0$, für die am rechten Rand $x' < x = a$ in $G_2(a, x') = 0$. Dabei muss man auch den Absolutbetrag im Exponenten gemäß $x' < x$ bzw. $x' > x$ auflösen. Dies gibt zwei lineare Gleichungen für die zwei Unbekannten c_1 und c_2 ; deren Lösung wird in den obigen Ansatz eingesetzt. Auch hiebei muss man wieder den Absolutbetrag wie vorher auflösen. Nach weiteren Umrechnungen ergibt sich wieder die Formel (12.18). Die Berechnungen sind im Notebook Kap12AnpGF.nb durchgeführt; dessen Ausdruck ist am Ende dieses Kapitels.

12.4.1 Die Greensche Funktion der zweidimensionalen, zeitunabhängigen Diffusionsgleichung in der vollen Ebene und für einen Kreis

Zuerst wird die Greensche Funktion G_1 in Polarkoordinaten für die volle Ebene mit Dirichletscher Randbedingung im Unendlichen berechnet. Aus dieser wird dann die Greensche Funktion G_2 für einen Kreis vom Radius $r = a$, auf dem wieder die Dirichletsche Randbedingung vorgeschrieben ist, abgeleitet.

Beide Greenschen Funktionen müssen in ϕ periodisch sein. Wir benutzen daher die Fourierreihendarstellung der Deltadistribution $\delta(\phi - \phi')$, Gl.(10.26), und setzen an:

$$G_1(r, r'; \phi, \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(r, r') e^{im(\phi - \phi')}. \quad (12.70)$$

Dieser Ausdruck wird in die Differentialgleichung eingesetzt, der beide Greenschen Funktionen genügen müssen, nämlich:

$$\begin{aligned} \Delta G - \kappa^2 G &= -\delta^2(x - x'); \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \kappa^2 \right] G &= -\frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi'). \end{aligned} \quad (12.71)$$

Dies gibt:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - \kappa^2 \right] g_m(r, r') e^{im(\phi - \phi')} = \\ &= \frac{1}{r} \delta(r - r') \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')}. \end{aligned}$$

Der Vergleich der Koeffizienten von $e^{im(\phi - \phi')}$ gibt folgende Gleichung für den Radialanteil $g_m(r, r')$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - \kappa^2 \right] g_m(r, r') = -\frac{1}{r} \delta(r - r'); \quad 0 \leq r, r' \leq \infty. \quad (12.72)$$

Der Differentialoperator auf der linken Seite entspricht der Differentialgleichung für die modifizierten Besselfunktionen $I_m(\kappa r)$ und $K_m(\kappa r)$ der Ordnung m . Die modifizierten Besselfunktionen werden in Kap.14 behandelt werden. Aus obiger Gleichung wird die radiale Greensche Funktion mittels der Methode der partikulären Integrale berechnet. Die Funktion $K_m(x)$ ist an $x = 0$

singulär. Daher ist die partikuläre Lösung am linken Rand, $r = 0$: $\phi_1(r) = I_m(\kappa r)$. Für $x \rightarrow \infty$ gehen $I_m(x)$ gegen Unendlich und $K_m(x)$ gegen Null. Deswegen muss die partikuläre Lösung am rechten Rand, $r = \infty$: $\phi_2(r) = K_m(\kappa r)$ sein. Daraus ergibt sich folgender Ansatz für die radiale Greensche Funktion:

$$g_m(r, r') = A I_m(\kappa r_{<}) K_m(\kappa r_{>}). \quad (12.73)$$

Die Konstante A muss aus der inhomogenen Gleichung (12.71) berechnet werden; dazu wird diese mit r durchmultipliziert, es wird der eben angegebene Ansatz eingesetzt und abschließend wird über r von $r = r' - \varepsilon$ bis $r = r' + \varepsilon$ integriert.

$$\begin{aligned} - \int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} dr \delta(r - r') &= \underline{-1} = \int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} dr \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dg_m}{dr} \right) - \left(\frac{m^2}{r} + \kappa^2 r \right) g_m \right] \\ &= \left[r \frac{dg_m}{dr} \right]_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} - \underbrace{\int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} dr \left(\frac{m^2}{r} + \kappa^2 r \right) g_m}_{\rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0} = \\ &= Ar' \left(\frac{d}{dr} [I_m(\kappa r_{<}) K_m(\kappa r_{>})]_{r=r'+\varepsilon} - \frac{d}{dr} [I_m(\kappa r_{<}) K_m(\kappa r_{>})]_{r=r'-\varepsilon} \right) \\ (\text{mit } \varepsilon \rightarrow 0) &= A \kappa r' \left(I_m(\kappa r') K'_m(\kappa r') - I'_m(\kappa r') K_m(\kappa r') \right) \\ &= A \kappa r' \frac{-1}{\kappa r'} = \underline{-A} \end{aligned}$$

Als Resultat ergibt sich für die Greensche Funktion der zweidimensionalen zeitunabhängigen Diffusionsgleichung der folgende Ausdruck:

$$G_1(r, r'; \phi, \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} I_m(\kappa r_{<}) K_m(\kappa r_{>}). \quad (12.74)$$

Die Greensche Funktion G_2 für das Innere des Kreise mit Dirichletscher Randbedingung auf dem Randkreis vom Radius a wird aus der der vollen Ebene, G_1 in Gl.(12.74), abgeleitet, indem zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, d.i.,

$$\Phi(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{im\phi} [c_m I_m(\kappa r) + d_m K_m(\kappa r)]$$

addiert wird. Da im allgemeinen G_2 im Ursprung, $r = 0$, keine Singularität haben kann (sondern nur am Punkt $(r = r', \phi = \phi')$), müssen alle $d_m = 0$ gesetzt werden. G_2 wird an $r = a$ der Dirichletschen Randbedingung unterworfen; dabei ist $0 \leq r' = r_{<} < r = r_{>} = a$.

$$\begin{aligned} r = a : G_2(a, \phi; r', \phi') &= G_1(a, \phi; r', \phi') + \Phi(a, \phi) \stackrel{!}{=} 0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \left[e^{-im\phi'} I_m(\kappa r') K_m(\kappa a) + c_m I_m(\kappa a) \right] \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Exponentialfunktionen $e^{im\phi}$ sind alle voneinander linear unabhängig. Die ganze Summe kann nur Null sein, wenn jede der rechteckigen Klammern für sich Null ist. Man hat also eine einfache Gleichung für jeden Koeffizienten c_m allein; deren Lösung ist:

$$c_m = e^{-im\phi'} I_m(\kappa r') K_m(\kappa a) / I_m(\kappa a).$$

Die Greensche Funktion G_2 für das Innere des Kreise mit Dirichletscher Randbedingung auf dem Randkreis vom Radius a ist also:

$$G_2(r, r'; \phi, \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} I_m(\kappa r_{<}) \left[K_m(\kappa r_{>}) - \frac{K_m(\kappa a)}{I_m(\kappa a)} I_m(\kappa r_{>}) \right]. \quad (12.75)$$

12.5 Summation der Eigenfunktionsentwicklung der schwingenden Saite

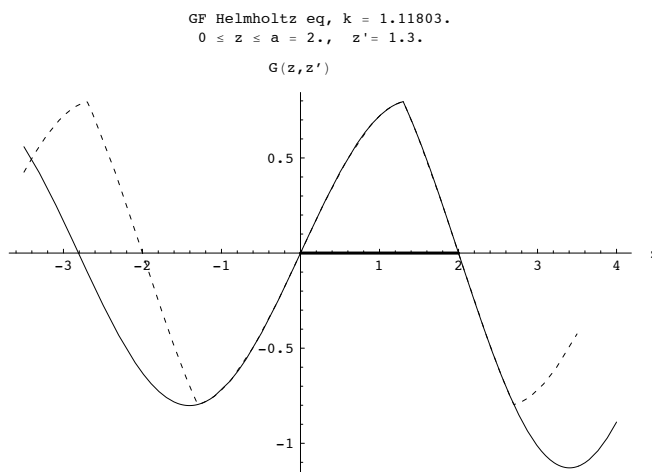


Abbildung 12.6: - - - Fourierreihendarstellung der Greenschen Funktion der schwingenden Saite $[0, a = 2]$. — Die ersten beiden Darstellungen, die mittels partikulären Integralen abgeleitet wurden.

Für die Greensche Funktion der schwingenden Saite:

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, x') + k^2 G(x, x') = -\delta(x - x'), \quad x = 0, a : G(x, x') = 0$$

sind in den vorhergehenden Paragraphen zwei verschiedene Darstellungen abgeleitet worden. Die Methode der partikulären Integrale führte zu folgenden beiden Darstellungen (12.13) und (12.15):

$$G(x, x') = -\frac{1}{k \tan(ka)} \sin(kx_{<}) [\sin(kx_{>}) - \tan(ka) \cos(kx_{>})];$$

$$k \neq k_n = n\pi/a, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$G(x, x') = \frac{\sin(kx_{<}) \sin[k(a - x_{>})]}{k \sin(ka)}.$$

Diese lassen sich leicht ineinander umrechnen. - Die Eigenfunktionentwicklung ergibt folgende Darstellung (12.41) der gleichen Greenschen Funktion:

$$G(x, x') = -\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(k_n x) \sin(k_n x')}{k^2 - k_n^2} = -\frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k_n x) \sin(k_n x')}{k^2 - k_n^2}.$$

Die Differentialgleichung dieser Greenschen Funktion ist inhomogen. Daher ist ihre Lösung eindeutig. Alle drei Greenschen Funktionen, die für die gleichen Randbedingungen abgeleitet worden sind, müssen im Definitionsgebiet $0 \leq x, x' \leq a$ übereinstimmen. Aus Abb.12.6 ist zu sehen, dass dies auch zutrifft. Aber ausserhalb können sich die Ausdrücke unterscheiden. Die Fourierreihe ist periodisch, die ersten zwei Darstellungen nicht.

Die obige Reihenentwicklung wird mittels Residuen aufsummiert, also mit dem Verfahren, das in §13.6 beschrieben worden ist. Dabei kommt die oben in der ersten Formelzeile aufgeführte geschlossene Darstellung heraus.

Die Summenformel ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{|z|=R_n} f(z) dz = 0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) + \sum_i \text{Res}(h(z) \pi \cot(\pi z)). \quad (12.76)$$

Pole von $\cot(\pi z)$ Pole von $h(z)$

Die Funktionen $f(z)$ und $h(z)$ sind:

$$f(z) = \pi \cot(\pi z) h(z) := -\cot(za) \frac{\sin(zx_<) \sin(zx_>)}{k^2 - z^2} + \frac{\sin(zx_<) \cos(zx_>)}{k^2 - z^2} \quad (12.77)$$

$$= -\frac{\sin(zx_<) \sin[z(a - x_>)]}{\sin(za) z^2 - k^2}. \quad ?? \quad (12.78)$$

Der Sinus im Nenner des ersten Terms der ersten Zeile hat liefert Pole erster Ordnung mit folgendem Residuum:

$$\sin(za) = 0, z = k_m = \pi m/a : \quad \text{Res}(, z = m\pi/a) = -\frac{1}{a} \frac{\sin(k_m x_<) \sin(k_m x_>)}{k^2 - k_m^2} + 0. \quad (12.79)$$

Die Null erinnert daran, dass der zweite Term keinen Pol hat. Die beiden Pole bei $z = \pm k$ geben das folgende Residuum:

$$z^2 - k^2 = 0, z = \pm k : \quad \text{Res}(, z = \pm k) = \frac{1}{k} \cot(ka) \sin(kx_<) [\sin(kx_>) - \tan(ka) \cos(kx_>)]. \quad (12.80)$$

Damit ist die Gleichheit der beiden Darstellungen bewiesen. Der Beweis ist vollständig, sobald gezeigt worden ist, dass der Grenzwert des Integrals mit $n \rightarrow 0$ Null ist. Dazu muss die Funktion $\pi \cot(\pi z) h(z)$ in geeignete Form gebracht werden.

$$\begin{aligned} \diamond &= \pi \cot(\pi z) h(z) = -\frac{1}{2i} \frac{e^{izx_<} - e^{-izx_<}}{e^{iza} - e^{-iza}} \frac{e^{iz(a-x_>)} - e^{-iz(a-x_>)}}{z^2 - k^2} \\ &= -\frac{1}{2i} \frac{1}{z^2 - k^2} \frac{\overset{\underline{1}}{e^{iz(a-x_>+x_<)}} - \overset{\underline{2}}{e^{iz(a-x_<-x_>)}} - \overset{\underline{3}}{e^{-iz(a-x_<-x_>)}} + \overset{\underline{4}}{e^{-iz(a-x_>+x_<)}}}{e^{iza} - e^{-iza}}. \end{aligned}$$

Ist $\text{Im}(z) > 0$, dann werden Zähler und Nenner mit e^{iza} durchmultipliziert:

$$\diamond = -\frac{1}{2i} \frac{1}{z^2 - k^2} \frac{\overset{\underline{4}}{e^{iz(x_>-x_<)}} [1 - \overset{\underline{1}}{e^{2iz(a-x_>+x_<)}}] + \overset{\underline{3}}{e^{iz(x_<+x_>)}} + \overset{\underline{2}}{e^{iz(2a-x_<-x_>)}}}{1 - e^{2iza}}.$$

Ist $\text{Im}(z) < 0$, dann werden Zähler und Nenner mit e^{-iza} durchmultipliziert:

$$\diamond = -\frac{1}{2i} \frac{1}{z^2 - k^2} \frac{\overset{\underline{1}}{e^{-iz(x_>-x_<)}} [1 - \overset{\underline{4}}{e^{-2iz(a-x_>+x_<)}}] + \overset{\underline{2}}{e^{-iz(x_<+x_>)}} + \overset{\underline{3}}{e^{-iz(2a-x_<-x_>)}}}{1 - e^{-2iza}}.$$

Die unterstrichenen Zifferen oberhalb der obigen Ausdrücke numerieren korrespondierende Terme. Die Ausdrücke

$$(x_> - x_<), \quad 2(a - x_> + x_<), \quad (x_> + x_<), \quad (2a - x_> - x_<)$$

sind alle positiv für $x \neq x'$. Die gewählte Schreibweise ermöglicht es leicht zu sehen, dass alle Exponentialfunktionen gegen Null gehen, wenn der Imaginärteil $\text{Im}(z) = y \rightarrow +\infty$ bzw. $\rightarrow -\infty$ strebt. Ist $\text{Im}(z) = y = 0$ dann gilt immer noch:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\pi \cot(\pi z) h(z)| = O(1/|z|^2).$$

Diese Abschätzungen zeigen, dass das obige Integral über den geschlossenen Weg R_n mit wachsendem n gegen Null geht.

.1 Notebook: Kap12AnpGF.nb. Anpassung einer Greenschen Funktion an neue Randbedingungen.

Berechnung der GF2 der zeitunabhängigen Diffusionsgleichung in $[0,a]$ aus GF1, der für $[-\infty,\infty]$.
 $k = \kappa \cdot \Phi$

■ Greensche Funktionen

$$g1 = 1 / 2 / k \text{Exp}[-k \text{Abs}[x - xp]]$$

$$\frac{e^{-k \text{Abs}[x-xp]}}{2 k}$$

$$g2 = g0 + c1 \text{Exp}[k x] + c2 \text{Exp}[-k x]$$

$$c2 e^{-k x} + c1 e^{k x} + \frac{e^{-k \text{Abs}[x-xp]}}{2 k}$$

■ RB bei $x = 0$:

$$eq1 = \text{Simplify}[g2, x < xp] == 0 /. x \rightarrow 0$$

$$c1 + c2 + \frac{e^{-k xp}}{2 k} == 0$$

■ RB bei $x = a$:

$$eq2 = \text{Simplify}[g2, x > xp] == 0 /. x \rightarrow a$$

$$c2 e^{-a k} + c1 e^{a k} + \frac{e^{k(-a+xp)}}{2 k} == 0$$

■ Berechnung der Koeffizienten

$$so = \text{Solve}[\{eq1, eq2\}, \{c1, c2\}] // \text{Flatten}$$

$$\left\{ c1 \rightarrow -\frac{e^{-k xp} (-1 + e^{a k + k xp + k(-a+xp)})}{2 (-1 + e^{2 a k}) k}, c2 \rightarrow -\frac{e^{a k - k xp} (e^{a k} - e^{k xp + k(-a+xp)})}{2 (-1 + e^{2 a k}) k} \right\}$$

■ Berechnung von G2 für $x > x'$

$$sol1 = \text{ExpToTrig}[\text{Simplify}[g2, x > xp] /. so] // \text{FullSimplify}$$

$$\frac{\text{Csch}[a k] \text{Sinh}[k(a-x)] \text{Sinh}[k xp]}{k}$$

■ Berechnung von G2 für $x < x'$

$$sol2 = \text{ExpToTrig}[\text{Simplify}[g2, x < xp] /. so] // \text{FullSimplify}$$

$$\frac{\text{Csch}[a k] \text{Sinh}[k x] \text{Sinh}[k(a-xp)]}{k}$$

$\text{Csch}[a k] = 1/\text{Sinh}[a k]$. Man sieht aus den beiden letzten Resultaten:

$$G(x, x') = \frac{\sinh[k x_{<}] \sinh[k \{a - x_{>}\}]}{k \sinh[a k]}$$

Abbildung 7: